COMBINATORIA BÁSICA

Principios básicos de recuento

- Principio de adición
- Principio de multiplicación
- Principio de inclusión-exclusión
- Principio del complementario

Selecciones básicas sobre conjuntos

- Variaciones
- Permutaciones
- Combinaciones

Coeficientes binomiales. Binomio de Newton.

Probabilidad. Regla de Laplace (?)

Ángeles Martínez Sánchez Curso 2016/2017
DMATIC ETSISI

Bibliografía básica:

- Cualquier libro de primero de Bachillerato (Tecnológico) o segundo de Bachillerato (Sociales)
- Matemática Discreta. Libro de la asignatura. Cap. 5
- Matemática Discreta y sus aplicaciones. K.H. Rosen. Mc Graw Hill. Cap. 4
- Problemas resueltos de Matemática Discreta. García F. , Hernández G. , Nevot A. Ed. Thomson . Cap. 5

Material de trabajo:

- Matemática Discreta. Problemas. Hoja 4.
- Actividad de Aprendizaje Moodle

Este material solo contiene definiciones, propiedades y resultados básicos. Las demostraciones, desarrollo de la teoría y ejercicios se verán en clase.

MOTIVACIÓN

Objetivo: determinar el número de elementos que verifican una propiedad sin construirlos todos: Contar sin enumerar

Técnicas:

- Expresar el problema en función de otros más sencillos
  Principios básicos de recuento
- Identificarlo con modelos conocidos
  Selecciones sobre conjuntos
- Modelizar mediante una función recursiva
  Funciones recursivas de argumento natural
- Combinar diversas técnicas
  ....

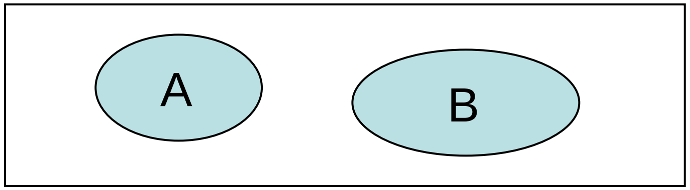
Herramienta útil: construir algunos ejemplos, representar el patrón general

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio de adición: Si un proceso de selección se puede realizar de dos formas excluyentes de modo que la primera de ellas admite n opciones y la segunda admite m opciones, entonces el número total de selecciones posibles es n+m.

Terminología conjuntista:

$|A \cup B| = |A| + |B|$



El resultado se extiende a K selecciones finitas y disjuntas dos a dos

$S = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ $\qquad$ $|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k|$

<u>Ejemplos:</u>

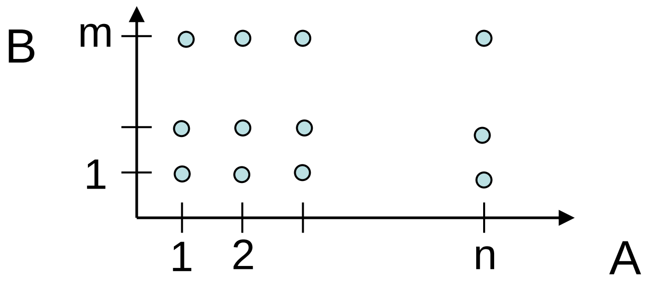
- Un estudiante debe elegir un ejercicio para entregar. En una lista de ejercicios hay 15, en otra 20 y en otra 10. ¿Cuántos ejercicios tiene el estudiante para elegir? ¿De cuántas formas puede elegir un ejercicio?
- Se tiran un dado rojo y uno verde y se suman las puntuaciones obtenidas. ¿De cuántas formas (en cuántas tiradas) se puede obtener la suma 7?

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio de multiplicación: Si un proceso de selección se puede dividir en dos pasos consecutivos de modo que hay n elecciones en el primero y por cada una de ellas hay m elecciones en el segundo, entonces el número total de elecciones es n.m.

Terminología conjuntista:

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$



El resultado se extiende a un proceso de selección de K etapas en las condiciones anteriores $S = n_1 . n_2 . \dots . n_k$

<u>Ejemplos:</u>

• Determinar el número de pares que se pueden obtener al lanzar al aire un dado verde y uno rojo.

• El menú de la cafetería de la EUI ofrece cuatro primeros platos, tres segundos y cinco postres. ¿Cuántas comidas (primer plato, segundo y postre) se pueden elegir?

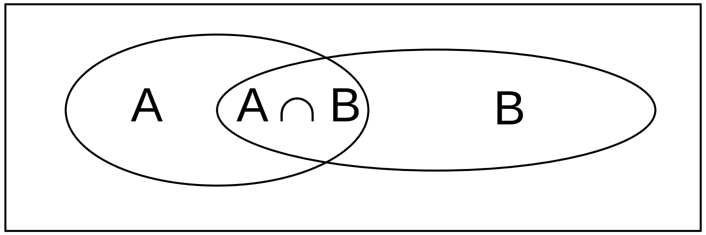
• Determinar el número de cadenas de 9 bits que acaban en 00 y empiezan por 10.

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

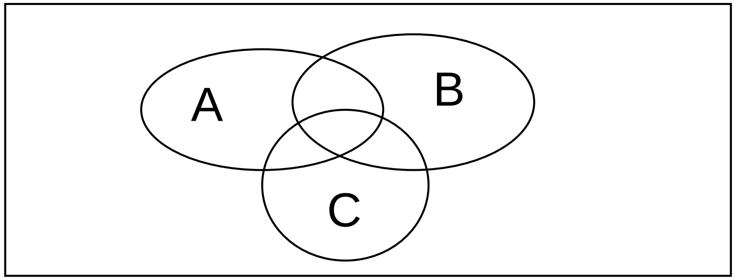
Principio de inclusión-exclusión: Si un proceso de selección se puede realizar de dos formas de modo que la primera admite n opciones, la segunda admite m opciones y hay r opciones comunes a ambas, entonces el número total de selecciones posibles es n+m-r.

Terminología conjuntista:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Este resultado se extiende al caso de tres o más formas de seleccionar un elemento teniendo en cuenta todas las repeticiones que intervienen.



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>Ejemplos:</u>

- Determinar el número de cadenas de 7 bits que empiezan por 11 o terminan en 0.
- Determinar la cantidad de números naturales que hay en {1,…,1000} que son divisibles por 5 o por 7.

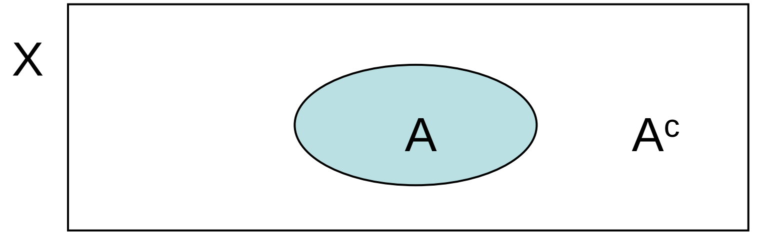
PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio del complementario: el número de elementos de un conjunto finito que verifican una propiedad es el número de elementos de dicho conjunto menos el número de elementos que no la verifican.

Es consecuencia del principio de adición

Terminología conjuntista:

$|A| = |X| - |A^c|$



Ejemplos:

• Determinar el número de cadenas de 9 bits que no terminan en 1111.

• Determinar el número de resultados que se pueden obtener al tirar un dado rojo y uno verde cuya suma es menor que 11.

Ejercicios:

1. Se quiere etiquetar las butacas de un estadio con dos letras (de un alfabeto de 26) seguidas de un número menor o igual que 1000. ¿Cuántas butacas se pueden etiquetar con este sistema?

2. Se quiere elegir una pieza de una máquina para hacer un control de calidad. Si la máquina tiene 35 manivelas, 20 motores y 40 engranajes, determinar de cuántas formas se puede elegir la pieza.

3. En un grupo de estudiantes de primer curso todos están matriculados en Álgebra, en M. Discreta o en ambas. Si hay 38 alumnos matriculados en Álgebra, 25 en M. Discreta y 6 en ambas, determinar el número de alumnos del grupo.

4. ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar con las cifras 1,2,3,4,5?

5. Determinar el número de cadenas de 8 bits tales que el producto de los tres primeros es cero.

6. Se lanzan dos dados (rojo y verde) al aire y se suman los resultados de las caras superiores. ¿De cuántas formas se puede obtener múltiplo de 4? ¿y de 6? ¿y múltiplo de 4 y 6? ¿y múltiplo de 4 o de 6?

7. Determinar el número de cadenas de 10 bits que empiezan por 11 y no terminan en 1.

8. Determinar cuántos números enteros de tres cifras distintas tienen todas ellas impares. ¿Y si se piden pares?

9. Determinar la cantidad de números entre 1 y 60 que son primos relativos con 60.

10. En una academia se imparten clases de inglés, francés y alemán. En este año 66 alumnos estudian al menos inglés, 55 al menos francés y 59 al menos alemán. Hay 17 que estudian inglés y francés, 22 inglés y alemán, 19 francés y alemán y 7 que estudian los tres idiomas. ¿Cuántos alumnos hay matriculados en la academia? ¿Cuántos estudian únicamente inglés?

SELECCIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS

Se denomina **variación** de r elementos de un total de n a una selección ordenada de r elementos distintos de los n posibles. Se representa V(n,r) y se verifica que el número de variaciones de n elementos tomados de r en r es:

$$V(n,r)=n(n-1)\cdots(n-(r-1))=\frac{n!}{(n-r)!}$$

La fórmula se obtiene usando el principio de multiplicación.

Ejemplos:

- Determinar el número de claves de cuatro cifras distintas que se pueden construir usando las cifras {0, 1, …, 9}.
- Determinar la cantidad de números de cuatro cifras distintas y significativas que se pueden formar con las cifras {0, 1, …, 9}.
- Determinar el número de formas de echar una bola roja, una azul y una verde en tres cajas diferentes, sabiendo que hay diez cajas (numeradas del 1 al 10).

SELECCIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS

Se denomina **variación con repetición** de r elementos de un total de n a una selección ordenada de r elementos, distintos o no, de los n posibles. Se representa VR(n,r) y el número de variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r es:

$$VR(n,r) = \underbrace{n \cdots n}_{r} = n^r$$

La fórmula se obtiene usando el principio de multiplicación.

Ejemplos:

- Determinar la cantidad de números de cuatro cifras significativas que se pueden formar con las cifras {0, 1, …, 9}.
- Determinar el número de formas de rellenar un test de 10 preguntas si cada una admite tres respuestas posibles: {a, b, c}.
- Determinar el número de formas de echar una bola roja, una verde y una azul en 10 cajas si en cada caja caben hasta tres bolas.

SELECCIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS

Se denomina **permutación** de n elementos a una selección ordenada de los n elementos disponibles. Se representa P(n) y se verifica que el número de permutaciones de n elementos es:

$$P(n)=n(n-1)(n-2)\cdots 1=n!$$

La fórmula se obtiene usando el principio de multiplicación.
Es un caso particular de las variaciones.

Ejemplos:

- Determinar el número de formas distintas en que 5 personas pueden alinearse en la taquilla de un cine. ¿Y en una mesa de tribunal? ¿Y en una mesa redonda?
- Determinar el número de palabras, con o sin significado, que se pueden formar con las letras de la palabra perla.
- Determinar el número de formas de colocar 7 libros distintos en una estantería. ¿Y si se colocan por orden alfabético?

Permutación circular de n elementos PC(n) = (n -1)!

SELECCIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS

Se denomina **permutación con repetición** de n elementos entre los que hay k grupos de elementos indistinguibles de tamaños $n_1, \ldots, n_k$, $(n = n_1 + \ldots + n_k)$ a una selección ordenada de los n elementos. Se representa $P(n, n_1, \ldots, n_k)$ y se verifica que el número de permutaciones con repetición es:

$$P(n, n_1, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

Clave: para cada grupo de elementos indistinguibles solo importan los lugares que ocupan en una alineación de los n elementos.

Ejemplos:

- Determinar el número de palabras, con o sin significado, que se pueden escribir con las letras de la palabra pelele.
- Determinar el número de cadenas de 7 bits que se pueden escribir con 3 ceros y 4 unos.
- Determinar el número de caminos que puede seguir una pulga que salta o bien a la izquierda o bien hacia arriba y da un total de cinco saltos a la izquierda y 3 hacia arriba.

SELECCIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS

Se denomina **combinación de r elementos** de un total de n a una selección, sin orden, de r elementos distintos de los n posibles. Se representa C(n,r) y se verifica que el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r es:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La fórmula se justifica viendo que V(n,r) = C(n,r)* P(r) .

Elegir con orden r elementos de un total de n se puede hacer en dos pasos, en el primero se eligen sin orden r elementos de los n y en el segundo se permutan los r elegidos. El principio de multiplicación proporciona el total de elecciones.

<u>Ejemplos:</u>

- Determinar de cuántas formas se pueden elegir folletos de 4 tipos de ordenadores si hay 10 modelos diferentes.
- Determinar los colores que se pueden obtener al mezclar 3 colores distintos de una paleta de 8 colores.
- Determinar el número de formas de echar tres bolas iguales en tres cajas diferentes, sabiendo que hay diez cajas (numeradas del 1 al 10).

¿Cómo apunta el camarero?

10

Té   Chocolate   Café

X X   X X X   X X X X X

¿Cuántas comandas podría recibir?

X X | X X X | X X X X X

X X X X | X X | X X X X

| | X X X X X X X X X X

PR(12, 2, 10)

Hay 3 elementos a elegir, el orden en que se pidan no da lugar a pedidos diferentes y es posible repetir la elección de elemento: CR(3, 10)

SELECCIONES BÁSICAS SOBRE CONJUNTOS

Se denomina **combinación con repetición** de r elementos de un total de n a una selección, sin orden, de r elementos distintos o no de los n posibles. Se representa CR(n,r) y se verifica que el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r es:

$$CR(n,r) = PR(r+n-1, r, n-1) = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Elección $\rightarrow$ XXX|XX| … XX|X   Hay r símbolos X y n-1 símbolos |

Ejemplo:

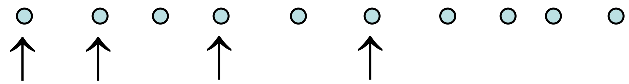
- Determinar el número de formas de elegir 7 piezas de fruta de un frutero que contiene peras, manzanas y naranjas (hay al menos 7 piezas de cada tipo).
- Determinar el número de pedidos diferentes que puede recibir un camarero que atiende a una mesa de 5 personas si las bebidas disponibles son café, té o menta.
- Determinar el número de colores que se pueden obtener al mezclar tres colores (no necesariamente distintos) de una paleta de 8.

COEFICIENTES BINOMIALES

Los números C(n,r) se llaman **números combinatorios** o **coeficientes binomiales**

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!} \quad = \binom{n}{r} \qquad n \ sobre \ r$$

Subconjuntos de r elementos



Propiedades

1. $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \qquad para\ todo\ \ n \geq 0$

Convenio: 0! = 1

2. $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad para\ 0 \leq r \leq n$

3. $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1} \qquad para\ todo\ \ 1 \leq r \leq n-1$

COEFICIENTES BINOMIALES

Las propiedades anteriores permiten obtener los números combinatorios de manera recursiva: Triángulo de Pascal o de Tartaglia.

n=0	$\binom{0}{0}$	1
n=1	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$	1 1
n=2	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$	1 2 1
n=3	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 3 3 1
n=4	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

COEFICIENTES BINOMIALES

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n =$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$(a + b)^n = (a+b)(a+b) \; \ldots\ldots \; (a+b)$

$a^n \rightarrow$ 1 forma

$a^{n-1} b \rightarrow$ C(n, 1) formas

$a^{n-2} b^2 \rightarrow$ C(n, 2) formas

:

$b^n \rightarrow$ 1 forma

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$$

COEFICIENTES BINOMIALES

Ejemplos bien conocidos:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^{2-1}b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = \binom{2}{0}a^2(-b)^0 + \binom{2}{1}a^{2-1}(-b)^1 + \binom{2}{2}a^0(-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = \binom{3}{0}a^3(-b)^0 + \binom{3}{1}a^2(-b)^1 + \binom{3}{2}a^1(-b)^2 + \binom{3}{3}a^0(-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

<u>Ejercicios</u>

1. Obtener la fila del triángulo de Pascal correspondiente a n=5.
2. Obtener los desarrollos de $(a + 2b)^4$ y $(3a-b)^5$.
3. Indicar el coeficiente de la expresión a^3b^4 en el desarrollo de $(a – b)^7$.
4. Indicar el coeficiente de a^2b^5 en el desarrollo de $(3a – b)^{7}$.
5. Desarrollar la expresión $(a + (1-a))^n$ usando el binomio de Newton. ¿Cuál es el valor de la suma que se obtiene?